

## Problème 335 – La trajectoire du plongeur

Niveau : Terminale (Spécialité Maths)

Chapitres : Fonctions (Limites, Continuité, Compléments sur la dérivation)

Inédit, publié le 07/10/2022



Florent, un lycéen passionné par la natation comme son idole et homonyme Florent Manaudou, souhaite modéliser de manière simplifiée la trajectoire d'un plongeur, aussi bien dans l'air que sous l'eau.

Dans un repère orthonormé (avec l'unité en mètres), où l'axe des abscisses représenterait le niveau de l'eau, la courbe représentant cette trajectoire partirait d'un point A (0 ; 1,2), le lieu initial du centre de gravité du plongeur ; elle ferait d'abord une parabole en atteignant un point maximum M d'abscisse 1,4, avant de redescendre jusqu'en B (4 ; 0), lieu où le nageur rentrerait dans l'eau. Puis la courbe se poursuivrait sous l'eau, avec une courbe qui descendrait légèrement, avant de remonter doucement vers la surface sans jamais l'atteindre totalement (on admettra ainsi que le centre de gravité du nageur reste sous l'eau dans sa course).

Pour créer cette courbe, la modélisation proposée par Florent serait ainsi l'association :

- De la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $[0 ; 4]$  par une fonction polynômiale du second degré de la forme  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ .
- De la courbe représentative d'une fonction  $g$  définie sur  $]4 ; +\infty[$  par une expression de la forme :

$$g(x) = k(x - 4)e^{-0,8(x-4)} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

- 1) a) Déterminer l'expression de  $f(x)$ .  
b) En déduire les coordonnées du point M.

- 2) a) Déterminer, en justifiant, les limites de  $g$  aux bornes de son intervalle de définition.  
b) En déduire qu'il y a une continuité entre les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  en  $x = 4$ .

- 3) a) Sans calculer sa valeur, justifier que dans le cadre de l'énoncé,  $k < 0$ .  
b) On admet que la trajectoire du plongeur suit la même direction juste avant et juste après l'entrée dans l'eau, ce qui se traduit par :  $f'(4) = \lim_{\substack{x \rightarrow 4 \\ x > 4}} g'(x)$ .

En déduire la valeur de  $k$  dans l'expression de  $g$ .

4) Établir les variations de  $g$  sur son intervalle de définition.

5) Représenter approximativement sur le repère ci-dessous la trajectoire du plongeon proposée par Florent, en y plaçant à la fois le point M mais aussi le point N, point le plus bas atteint par le nageur lors de son plongeon.

